

REDO - Neurosciences

Résumé de la publication de Shun-ichi Amari

*“ Dynamics of Pattern Formation Lateral-Inhibition Type
Neural Fields “*

Center of Neuroscience - University of Massachusetts

11 mai 2017



**CENTRALE
MARSEILLE**

Introduction

Le travail présenté dans cette publication [1] par Shun-ichi Amari est le fruit d'un travail théorique qui ne s'appuie pas sur l'état de la science en matière de neurones, mais qui aboutit pourtant à un modèle expliquant la faculté de mémoire des neurones. On peut dire que cette démarche est "intuitive".

Il convient de préciser que la publication traite d'un modèle "monocouche", mais propose d'aller plus loin avec un modèle plus fin et plus complexe "multicouche". Dans un esprit de synthèse et de concision, nous n'exposerons ici que la théorie monocouche.

On modélise le réseau de neurone par un champ de neurones (neural field), d'abord en 2D (surface de neurone), puis en généralisant en 3D, plus proche du cerveau. Chaque élément du réseau de neurone ainsi modélisé est doté d'un potentiel d'excitation et d'inhibition identique. Pourtant, l'excitation peut provoquer des motifs, patterns, non homogènes. Derrière certains de ces motifs, se cache en fait la faculté des neurones à stocker de l'information.

Il explique qu'il y a 5 types de dynamiques de motifs, en réalité seuls les deux derniers sont intéressants :

Champ monostable. L'excitation s'éteint simplement comme le ferait une onde évanescence. C'est une dynamique triviale.

Champ monostable, où l'excitation se répand dans toute la surface. Toute la surface est donc excitée. La dynamique est triviale.

Explosion bistable. Soit l'excitation se répand sans limite (si l'excitation se fait sur un intervalle suffisamment grand), soit l'excitation s'éteint (dans le cas où l'excitation se fait sur un intervalle trop petit).

Champ bistable. Cette fois, soit l'excitation provoque une excitation locale du champ à une longueur bien précise, soit elle s'éteint. Si elle ne s'éteint pas, cette excitation locale se déplace sur la surface jusqu'à trouver l'endroit qui lui va bien et y rester (sur un maximum de l'excitation initiale).

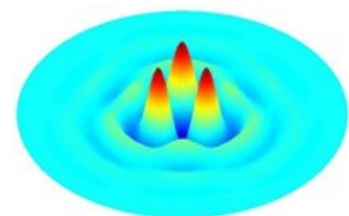


Figure 1 - Champ bistable [2]

Champ spatialement périodique. Dans ce cas l'excitation initiale provoque l'excitation de toute la surface avec une périodicité spatiale.

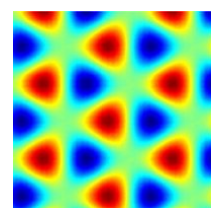


Figure 2 - Champ spatialement périodique [2]

En nous concentrant sur une seule couche, on remarque qu'un neurone est une surface capable de se modéliser en fonction de l'input apporté. Sa particularité est de conserver cette modification.

Un neurone a un effet d'action dans le voisinage, excitateur autour, inhibiteur plus loin et sans action encore plus loin.

Lorsqu'une impulsion $S(t)$ est donnée à un endroit x donné, le neurone l'enregistre. Si cette impulsion se déplace à un temps $t+dt$ et applique une tension à une position $x+dx$ alors le neurone enregistre une nouvelle impulsion qui va modifier la précédente (en l'atténuant ou en l'augmentant).

C'est ce phénomène que Shun-ichi Amari a souhaité modéliser mathématiquement.

Modélisation mathématique: Étude de l'équation à une seule couche

Plusieurs hypothèses sont faites ici :

- Mono-dimension
- Milieu homogène
- Régime permanent
- Une seule couche dans le modèle

On introduit la fonction $f : f(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 1 & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$

Cette équation modélise le fait qu'un neurone est excité à son maximum lorsque $u \geq 0$.

On a alors l'équation correspondant à une couche de neurone :

$$\tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -u + \int w(x - y) f[u(y)] dy + h + s(x, t)$$

Avec:

- $w(x, y)$ qui représente la fonction d'action sur le voisinage modélisant le phénomène excitation proche et d'inhibition lointaine.
- $u(x, t)$ représente le potentiel à la position x au temps t . Au plus il est élevé, au plus le neurone est excité. Ce potentiel peut représenter l'émission d'un spike. u est à valeur dans \mathbb{R} .
- $s(x, t)$ représente l'input, c'est à dire le signal d'entrée à la position x au temps t .
- h est une constante que l'on va fixer pour percevoir les variations dans le modèle.

L'équation ci-dessus montre la variation du potentiel à la position x au temps t , elle correspond au potentiel à cet instant plus l'effet du voisinage avec la fonction w , à laquelle on ajoute la constante h ainsi que l'éventuel signal d'entrée fourni sur cette position. Elle s'apparente à une équation de réaction-diffusion.

Solutions d'équilibre en absence de signal d'entrée :

Nous allons limiter l'étude qui suit à une modélisation en absence de signal d'entrée.

On a donc $\forall x, t, s(x, t) = 0$.

A l'équilibre on a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ donc :

$$u(x) = \int_{R[u]} w(x-y) dy + h$$

En posant $R[u] = \{x | u(x) > 0\}$

Avec $R[u]$ qui correspond à la région excitée pour un potentiel de distribution $u(x)$, on a d'après l'équation précédente :

- Un équilibre $R[u] = \phi$, pour tout x positif, ce qui signifie qu'aucune région du modèle n'est excitée. C'est appelé la ϕ -solution.
- Un équilibre $R[u] = (-\infty, \infty)$, ce qui signifie que toute la région est excitée. On appelle cette solution la ∞ -solution.
- Un équilibre $R[u] = (0, a)$, qui correspond seulement à une excitation localisée sur l'intervalle $[0, a]$. Cette solution est une a -solution.

On pose de plus : $W(x) = \int_0^x w(y) dy$

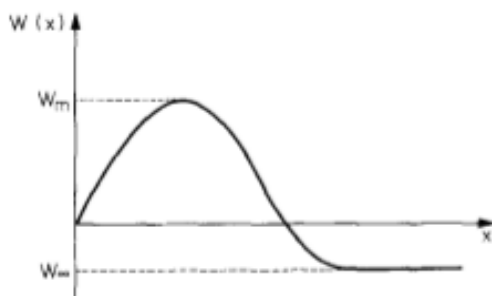


Fig. 3. Integral $W(x)$ of weighting function $w(x)$

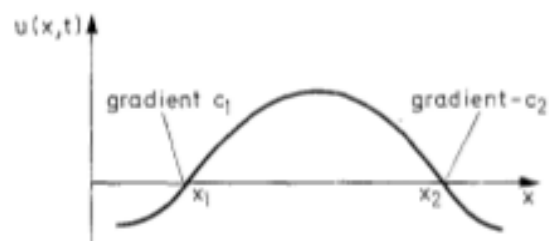


Fig. 4. A localized excitation

Nous pouvons voir avec ces deux figures l'impact d'une perturbation localisée sur le système. Deux quantités importantes apparaissent :

$$W_m = \max_{x>0} W(x) \text{ et } W_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} W(x)$$

Un théorème prend alors forme :

- Il y a une ϕ -solution si et seulement si $h < 0$
- Il y a une ∞ -solution si et seulement si $2W_\infty > -h$
- Il existe une a-solution si et seulement si $h < 0, a > 0$ et $W(a) + h = 0$.

La solution précédente est stable si : $\frac{dW(a)}{da} < 0$.

Retour sur la théorie

Cette étude d'une équation à une couche est fortement inspirée des structures de Turing proposées en 1952 dans son livre *The Chemical Basis of Morphogenesis*. [2][4]

Cette méthode mathématique propose d'expliquer par des règles simples les structures complexes que nous trouvons à plusieurs échelles dans la nature, comme par exemple les tâches d'un guépard. On considère une grille de cellules qui peuvent être dans deux états possibles : un état activé ou désactivé. Chacune de ces cellules agit en conjonction et a un effet activateur à courte portée et inhibiteur à longue portée. Ce qui est représenté dans notre modèle par la fonction w . L'équation considérée ici est une équation inspirée d'une équation de réaction-diffusion de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u + f(u) \quad [5]$$

où u représente le vecteur des concentrations chimiques, D une matrice de coefficient de diffusion et $f(u)$ la cinétique chimique.

On reconnaît cette équation dans notre modèle qui dépend à gauche du temps et à droite de l'espace.

Ce genre de modèle est également utilisé en plus que pour de la modélisation biologique, pour la robotique ou pour la modélisation de saccades oculaire.

Bibliographie

[1] S.-i. Amari, "Dynamics of Pattern Formation in Lateral-Inhibition Type Neural Fields," *Biological Cybernetics*, 1977.

[2] S. Coombes, "Neural fields," [Online]. Available:

http://www.scholarpedia.org/article/Neural_fields. [Accessed 11 05 2017].

- [3] A. Lesne, "Turing et la morphogénèse : les "structures de Turing", [Online]. Available: <http://www.lptl.jussieu.fr/user/lesne/Turing-preprint.pdf>. [Accessed 11 05 2017].
- [4] A. M. Turing, "The Chemical Basis of Morphogenesis," The Royal Society, 1952.
- [5] Philip K. Maini, "Turing's model for biological pattern formation and the robustness problem," [Online]. Available: <http://rsfs.royalsocietypublishing.org/content/2/4/487#sec-1>.